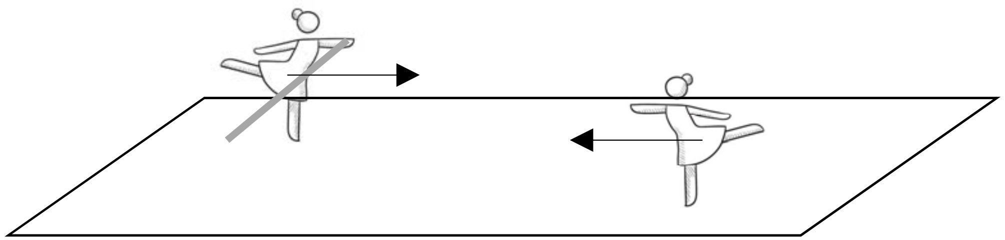
Sistemas de partículas

Problema de los patinadores

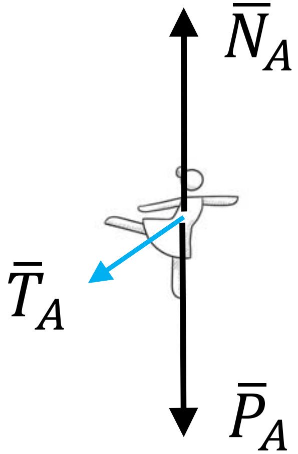
Enunciado

- Un patinador de masa M_A=2m me mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una rapidez v. Este patinador sostiene una barra ideal de longitud L. Otro patinador de masa M_B=m se mueve sobre esta superficie con velocidad contraria al patinador A. Al encontrarse, cada uno queda unido a los extremos de la barra.
  - Describir el movimiento de los patinadores una vez que quedan unidos.
  - Describir qué ocurre si uno de los patinadores se acerca, siendo la distancia entre ellos es L´=L/2

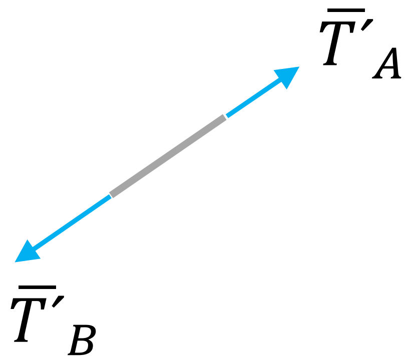


Sistema: $M_A + M_B$ + barra

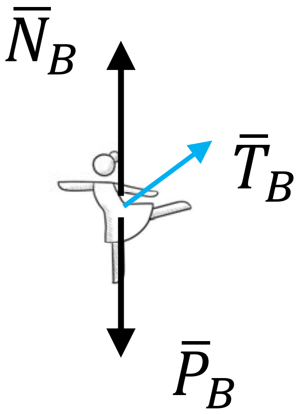
- DCL de M_A



DCL de barra

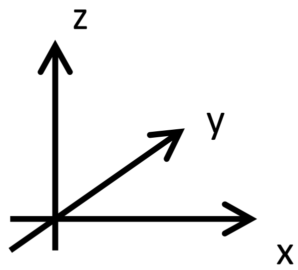


DCL de M_B



- Fuerzas externas y fuerzas internas

- Sistemas de coordenadas



Conservación de cantidad de movimiento lineal: Descripción de CM

$$\sum \bar{F} = \frac{d\bar{P}_{Sist}}{dt} = \cancel{\bar{P}_A} + \cancel{\bar{N}_A} + \cancel{\bar{P}_B} + \cancel{\bar{N}_B} = 0$$

- Como la suma de fuerzas es nula, entonces se conserva la cantidad de movimiento lineal.

$$\bar{P}_{Sist0} = \bar{P}_{Sist1}$$

- Antes de quedar unidos:

$$\bar{P}_{Sist0} = M_A \cdot \bar{v}_{A0} + M_B \cdot \bar{v}_{B0}$$

$$\bar{P}_{Sist0} = 2m \cdot v\breve{\imath} + m \cdot (-v\breve{\imath}) = m \cdot v\breve{\imath}$$

Conservación de cantidad de movimiento lineal: Descripción de CM

- La cantidad de movimiento después de quedar unido se puede escribir:

$$\bar{P}_{Sist1} = M_A \cdot \bar{v}_{A1} + M_B \cdot \bar{v}_{B1}$$

- Pero como tenemos 2 incógnitas, también se puede pensar como:

$$\bar{P}_{Sist1} = M_{sist} \cdot \bar{v}_{CM} = 3m \cdot \bar{v}_{CM}$$

- Si la cantidad de movimiento lineal es constante, la velocidad del centro de masa también. Y se puede calcular

$$\bar{P}_{Sist0} = \bar{P}_{Sist1}$$

$$m \cdot v\breve{\imath} = 3m \cdot \bar{v}_{CM}$$

$$\bar{v}_{CM} = \frac{v}{3}\breve{\imath}$$

Conservación de cantidad de movimiento lineal: Descripción de CM

- A partir de la conservación de la cantidad de movimiento lineal pudimos calcular la velocidad del centro de masa. Y afirmar que éste punto hace un MRU.

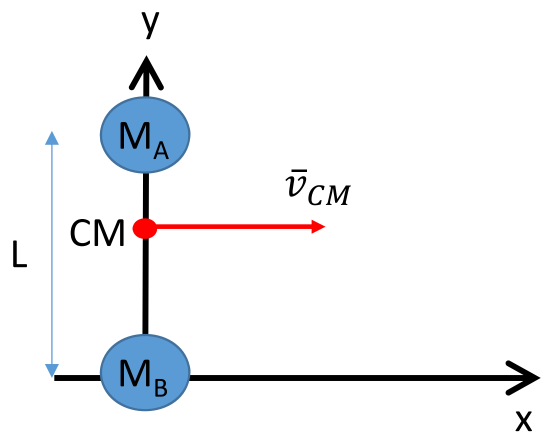
$$\bar{v}_{CM} = \frac{v}{3}\breve{\imath}$$

- ¿Cuál es la ubicación del centro de masa?

$$\bar{r}_{CM} = \frac{M_A \cdot \bar{r}_A + M_B \cdot \bar{r}_B}{M_A + M_B}$$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{2m \cdot L\breve{\jmath} + m \cdot \bar{0}}{3m}$$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{2}{3}L\breve{\jmath}$$



Conservación de cantidad de movimiento angular (CM): Descripción de las partículas respecto CM

$$\sum \bar{T}_{CM} = \frac{d\bar{L}_{CM}}{dt} = \underbrace{\bar{T}_{CM}^{P_A} + \bar{T}_{CM}^{N_A}}_{\text{=0 porque } \bar{r}_{A/CM} \text{ es lo mismo pero las fuerzas son iguales y opuestas}} + \underbrace{\bar{T}_{CM}^{P_B} + \bar{T}_{CM}^{N_B}}_{\text{=0 porque } \bar{r}_{B/CM} \text{ es lo mismo pero las fuerzas son iguales y opuestas}} = 0$$

- Como el torque de las fuerzas externas es nulo, se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema respecto del centro de masa

$$\bar{L}_{CM}^{Sist0} = \bar{L}_{CM}^{Sist1}$$

Conservación de cantidad de movimiento angular (CM): Descripción de las partículas respecto CM

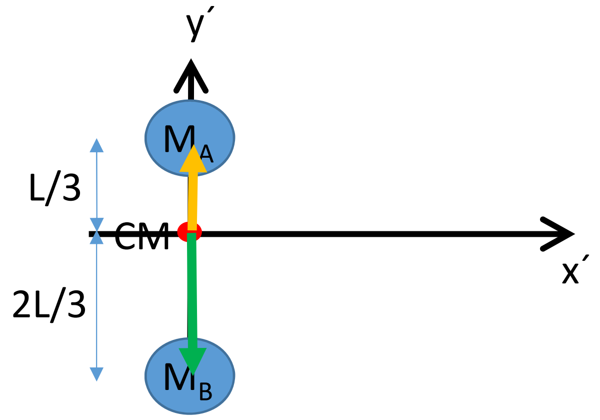
- Se puede calcular la cantidad de movimiento angular antes que se unan

$$\bar{L}_{CM}^{Sist0} = \bar{r}_{0A/CM} \times \bar{P}_{0A/CM} + \bar{r}_{0B/CM} \times \bar{P}_{0B/CM}$$

- Donde

$$\bar{r}_{0A/CM} = \frac{L}{3}\breve{j}$$

$$\bar{r}_{0B/CM} = -\frac{2L}{3}\breve{j}$$



Conservación de cantidad de movimiento angular (CM): Descripción de las partículas respecto CM

- Y

$$\bar{v}_{0A/CM} = \bar{v}_{0A} - \bar{v}_{CM} = v\breve{\imath} - \frac{v}{3}\breve{\imath} = \frac{2v}{3}\breve{\imath}$$

$$\bar{v}_{0B/CM} = \bar{v}_{0B} - \bar{v}_{CM} = -v\breve{\imath} - \frac{v}{3}\breve{\imath} = -\frac{4v}{3}\breve{\imath}$$

- Entonces:

$$\bar{P}_{0A/CM} = M_A \cdot \bar{v}_{0A/CM} = 2m \cdot \frac{2v}{3}\breve{\imath} = \frac{4mv}{3}\breve{\imath}$$

$$\bar{P}_{0B/CM} = M_B \cdot \bar{v}_{0B/CM} = m \cdot \left(-\frac{4v}{3}\breve{\imath}\right) = -\frac{4mv}{3}\breve{\imath}$$

Conservación de cantidad de movimiento angular (CM): Descripción de las partículas respecto CM

- Reemplazando

$$\bar{L}_{CM}^{Sist0} = \bar{r}_{0A/CM} \times \bar{P}_{0A/CM} + \bar{r}_{0B/CM} \times \bar{P}_{0B/CM}$$

$$\bar{L}_{CM}^{Sist0} = \frac{L}{3}\breve{j} \times \frac{4mv}{3}\breve{i} + \left(-\frac{2L}{3}\breve{j}\right) \times \left(-\frac{4mv}{3}\breve{i}\right)$$

$$\bar{L}_{CM}^{Sist0} = \left(-\frac{4mLv}{9}\breve{k}\right) + \left(-\frac{8mLv}{9}\breve{k}\right) = -\frac{4mLv}{3}\breve{k}$$

Conservación de cantidad de movimiento angular (CM): Descripción de las partículas respecto CM

- Ahora calculamos después que están unidos

$$\bar{L}_{CM}^{Sist1} = \bar{r}_{1A/CM} \times \bar{P}_{1A/CM} + \bar{r}_{1B/CM} \times \bar{P}_{1B/CM}$$

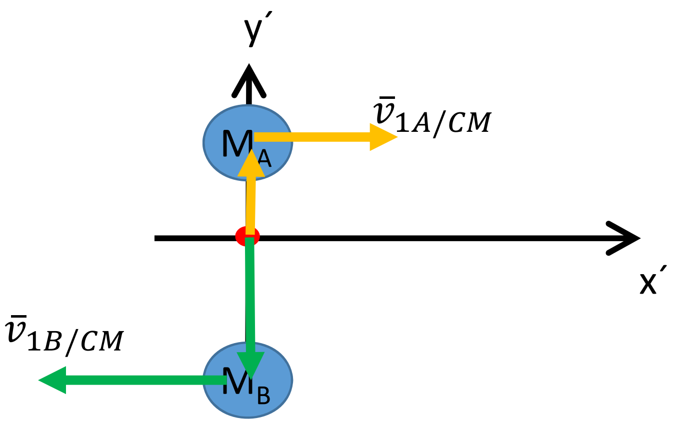
$$\bar{L}_{CM}^{Sist1} = \bar{r}_{1A/CM} \times 2m \cdot \bar{v}_{1A/CM} + \bar{r}_{1B/CM} \times m \cdot \bar{v}_{1B/CM}$$

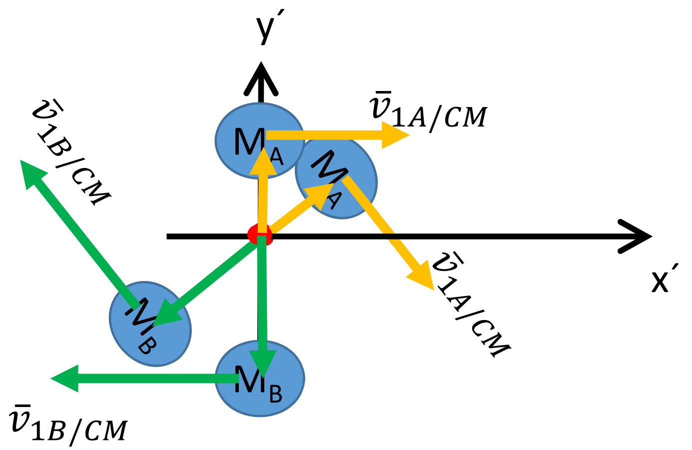
$$\bar{L}_{CM}^{Sist1} = 2m \cdot \bar{r}_{1A/CM} \times \bar{v}_{1A/CM} + m \cdot \bar{r}_{1B/CM} \times \bar{v}_{1B/CM}$$

- Nuevamente aparecen dos incógnitas. Analicemos un poco mejor estos términos

Conservación de cantidad de movimiento angular (CM): Descripción de las partículas respecto CM

- Si estudiamos el movimiento respecto del centro de masa cuando se mueven después de que quedan unidos se puede decir que el ángulo que recorren ambas masas es el mismo. Entonces tienen la misma velocidad angular $\overline{\Omega} = \Omega\breve{k}$





Conservación de cantidad de movimiento angular (CM): Descripción de las partículas respecto CM

- Entonces podemos escribir: $\bar{v}_{1A/CM} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{1A/CM}$

$$\bar{v}_{1B/CM} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{1B/CM}$$

Observación:
$\bar{\Omega} = -\Omega\hat{k}$

- Y $\bar{L}_{CM}^{Sist1} = 2m \cdot \bar{r}_{1A/CM} \times \left(\bar{\Omega} \times \bar{r}_{1A/CM}\right) + m \cdot \bar{r}_{1B/CM} \times \left(\bar{\Omega} \times \bar{r}_{1B/CM}\right)$

$$\bar{L}_{CM}^{Sist1} = \left(-\frac{2mL^2}{9}\Omega\breve{k}\right) + \left(-\frac{4mL^2}{9}\Omega\breve{k}\right) = -\frac{2mL^2}{3}\Omega\breve{k}$$

Conservación de cantidad de movimiento angular (CM): Descripción de las partículas respecto CM

- Finalmente:

$$\bar{L}_{CM}^{Sist0} = \bar{L}_{CM}^{Sist1}$$

$$-\frac{4mLv}{3}\breve{k} = -\frac{2mL^2}{3}\Omega\breve{k}$$

- Y se obtiene que

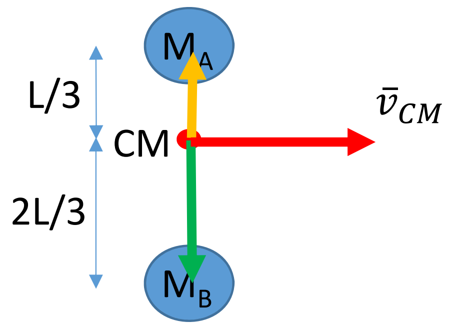
$$\bar{\Omega} = -\frac{2v}{L}\breve{k}$$

Conclusión ítem a)

- El centro de masa se mueve con una velocidad:

$$\bar{v}_{CM} = \frac{v}{3}\breve{\imath}$$

- El centro de masa está ubicado en



- Y la velocidad angular de las partículas respecto del centro de masa es:

$$\bar{\Omega} = -\frac{2v}{L}\breve{k}$$

Ítem b) qué ocurre si L´=L/2 (instante 2)

- Si uno de los patinadores se acerca es porque hace una fuerza sobre la barra. Esta fuerza es interna. Así que se conserva la cantidad de movimiento lineal y cantidad de movimiento angular.

- De la conservación de cantidad de movimiento lineal, podemos decir que la velocidad del centro de masa se mantiene constante: $\bar{v}_{CM} = \frac{v}{3}\breve{\imath}$

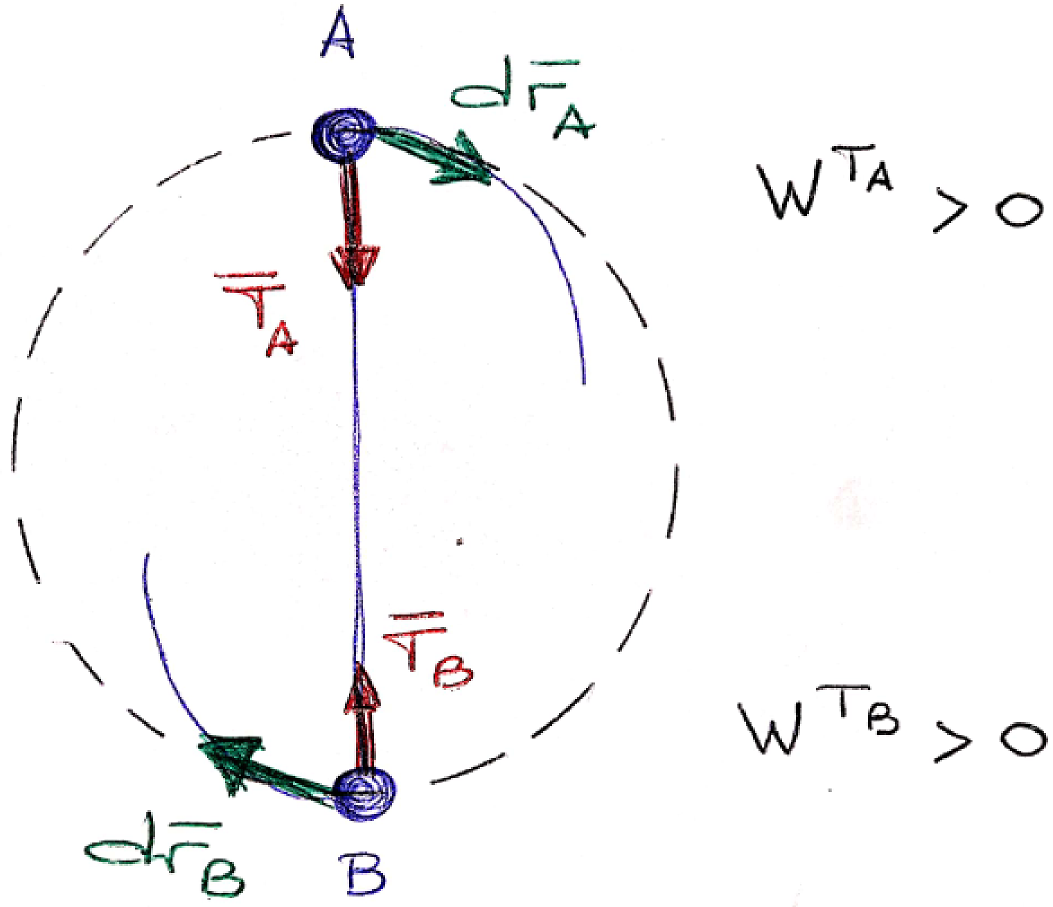
- De la conservación de cantidad de movimiento angular, podemos afirmar que:

$$-\frac{4mLv}{3}\breve{k} = -\frac{2mL'^2}{3}\Omega'\breve{k} = -\frac{2mL^2}{12}\Omega'\breve{k}$$

$$\overline{\Omega'} = -\frac{8v}{L}\breve{k} = 4\overline{\Omega}$$

Extra: ¿qué ocurre con la energía cinética?

- La energía cinética del sistema aumenta. Porque hay trabajo de las fuerzas internas



Extra: ¿qué ocurre con la energía cinética?

- Se puede calcular la variación de energía cinética entre el instante 1 y 2.

$$E_c^1 = E_c^{Sist/CM1} + E_c^{CM1} = \frac{M_A}{2} v_{A1/CM}^2 + \frac{M_B}{2} v_{B1/CM}^2 + \frac{M_{Tot}}{2} v_{CM}^2$$

$$E_c^1 = \frac{2m}{2}\left(\Omega \frac{L}{3}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\Omega \frac{2L}{3}\right)^2 + \frac{3m}{2} v_{CM}^2 = \frac{3}{2} m v^2$$

$$E_c^2 = E_c^{Sist/CM2} + E_c^{CM2} = \frac{M_A}{2} v_{A2/CM}^2 + \frac{M_B}{2} v_{B2/CM}^2 + \frac{M_{Tot}}{2} v_{CM}^2$$

$$E_c^2 = \frac{2m}{2}\left(\Omega' \frac{L'}{3}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\Omega' \frac{2L'}{3}\right)^2 + \frac{3m}{2} v_{CM}^2 = \frac{11}{2} m v^2$$

$$\Delta E_c = E_c^2 - E_c^1 = 4 m v^2$$

Extra2: ¿qué ocurre con la energía cinética?

- Otra forma de calcular la variación de energía cinética (Cálculos auxiliares en próxima diapositiva)

$$E_c^1 = \frac{M_A}{2} v_{A0}^2 + \frac{M_B}{2} v_{B0}^2 = \frac{2m}{2} (v)^2 + \frac{m}{2} (v)^2 = \frac{3}{2} m v^2$$

$$E_c^2 = \frac{M_A}{2} v_{A1}^2 + \frac{M_B}{2} v_{B1}^2 = \frac{2m}{2} \left(\frac{5}{3} v\right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{7}{3} v\right)^2 = \frac{11}{2} m v^2$$

$$\Delta E_c = E_c^2 - E_c^1 = 4 m v^2$$

Extra2: Cálculos auxiliares

$$\bar{v}_{1A} = \bar{v}_{1A/CM} + \bar{v}_{CM} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{1A/CM} + \bar{v}_{CM}$$

$$\bar{v}_{1B} = \bar{v}_{1B/CM} + \bar{v}_{CM} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{1B/CM} + \bar{v}_{CM}$$

$$\bar{v}_{2A} = \bar{v}_{2A/CM} + \bar{v}_{CM} = \overline{\Omega'} \times \overline{r'}_{2A/CM} + \bar{v}_{CM}$$

$$\bar{v}_{2B} = \bar{v}_{2B/CM} + \bar{v}_{CM} = \overline{\Omega'} \times \overline{r'}_{2B/CM} + \bar{v}_{CM}$$